

## Resolução dos problemas para as aulas práticas

1. Estabeleça as seguintes identidades (onde  $z = x + iy$ ):

b)  $\operatorname{sen}(iz) = i \operatorname{senh} z;$

d)  $\cos^2 z + \operatorname{sen}^2 z = 1$ ;

e)  $\operatorname{sen}(z+w) = \operatorname{sen} z \cdot \cos w + \cos z \cdot \operatorname{sen} w$ ; f)  $\cosh^2 z + \sinh^2 z = \sinh(2z)$ .

(a) Utilizando a definição de coseno complexo

(b) De modo análogo

**(c)** Notando que para um complexo  $z$  o quadrado do seu módulo é dado por  $|z|^2 = z\bar{z}$ , obtemos:

e também:

Logo:

1

(d) Mais uma vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\begin{aligned}\cos^2 z + \sin^2 z &= \left( \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2iz} + 2 + e^{-2iz} - e^{2iz} + 2 - e^{-2iz}) = 1\end{aligned}$$

(e) Outra vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\begin{aligned}\sin z \cos w + \cos z \sin w &= \\ &= \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2} + \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} \frac{e^{iw} - e^{-iw}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z+w)} + e^{i(z-w)} - e^{i(-z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} + \frac{e^{i(z+w)} - e^{i(z-w)} + e^{i(-z+w)} - e^{-i(z+w)}}{4i} = \\ &= \frac{e^{i(z+w)} - e^{-i(z+w)}}{2i} = \sin(z+w)\end{aligned}$$

(f) Ainda mais uma vez utilizando a definição das funções trigonométricas complexas

$$\begin{aligned}\cosh^2 z + \sinh^2 z &= \left( \frac{e^z + e^{-z}}{2} \right)^2 + \left( \frac{e^z - e^{-z}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} (e^{2z} + 2 + e^{-2z} + e^{2z} - 2 + e^{-2z}) \\ &= \frac{e^{2z} + e^{-2z}}{2} = \cosh(2z).\end{aligned}$$

2. Calcule o valor principal (i.e., tomando na função  $\log z$  o ângulo correspondente à restrição principal) de:

$$\text{a) } \log(-i); \quad \text{b) } \log(1-i); \quad \text{c) } i^i; \quad \text{d) } \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{1+i}.$$

**Resolução:**

$$\text{(a) } \log(-i) = \log(1e^{-i\pi/2}) = \log 1 - \frac{i\pi}{2} = -\frac{i\pi}{2}$$

$$\text{(b) } \log(1-i) = \log(\sqrt{2}e^{-i\pi/4}) = \frac{1}{2}\log 2 - i\frac{\pi}{4}$$

$$\text{(c) } i^i = e^{\log(i^i)} = e^{i\log i} = e^{i\log(1e^{i\pi/2})} = e^{i(i\pi/2)} = e^{-\pi/2}$$

$$\text{(d) } \left( \frac{1+i}{\sqrt{2}} \right)^{1+i} = e^{(1+i)\log(\frac{1+i}{\sqrt{2}})} = e^{(1+i)i\pi/4} = \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\pi/4} (1+i)$$

3. Determine todas as soluções das seguintes equações:

$$\text{a) } e^z = 2 \quad \text{b) } e^{iz} + e^{-iz} + 2 = 0 \quad \text{c) } \log z = 1 + 2\pi i \quad \text{d) } \sin(2z) = 5$$

**Resolução:**

$$\text{(a) } e^z = 2 \Leftrightarrow z = \log 2 + 2k\pi i \text{ com } k \in \mathbb{Z}.$$

(b) Multiplicando todos os termos por  $e^{iz}$ , obtem-se

$$\begin{aligned} e^{2iz} + 2e^{iz} + 1 = 0 &\Leftrightarrow (e^{iz} + 1)^2 = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = -1 \\ &\Leftrightarrow z = \frac{1}{i} \log(-1) = -i(i\pi(2k+1)) = (2k+1)\pi \end{aligned}$$

com  $k \in \mathbb{Z}$ .

(c)  $\log z = 1 + 2\pi i \Rightarrow z = e^{1+2\pi i} = e$

**Nota:**  $\log e = 1 + 2\pi i$ , apenas com uma escolha adequada do ramo do logaritmo.

(d) Pela definição de seno

$$\operatorname{sen}(2z) = 5 \Leftrightarrow \frac{e^{2iz} - e^{-2iz}}{2i} = 5$$

e multiplicando todos os termos da equação por  $e^{2iz}$

$$e^{4iz} - 10ie^{2iz} - 1 = 0 \Leftrightarrow e^{2iz} = \frac{10i \pm \sqrt{-96}}{2} = (5 \pm 2\sqrt{6})i$$

Então

$$2iz = \log((5 \pm 2\sqrt{6})i) + 2k\pi i, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Finalmente, dado que  $5 \pm 2\sqrt{6}$  são ambos positivos,

$$z = \frac{-i}{2} \left( \log(5 \pm 2\sqrt{6}) + i\frac{\pi}{2} \right) + k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

ou seja

$$z = \frac{\pi}{4} + k\pi - \frac{i}{2} \left( \log(5 \pm 2\sqrt{6}) \right), \quad k \in \mathbb{Z}$$

4. Determine o conjunto dos pontos do plano complexo onde as seguintes funções admitem derivada:

$$(a) \ xy - ix \quad (b) \ z^2 - 3z \quad (c) \ z - \bar{z} \quad (d) \ e^{\bar{z}} \quad (e) \ \operatorname{Im}(z^2).$$

**Resolução:**

(a) Sendo  $f(x + iy) = xy - ix$ , verifica-se que

$$\operatorname{Re} f \equiv u(x, y) = xy, \quad \operatorname{Im} f \equiv v(x, y) = -x$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = y, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = x, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -1, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

Atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas,  $f$  será diferenciável no conjunto de pontos onde se verifiquem as condições de Cauchy-Riemann. Tem-se então que

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

pelo que  $f$  é diferenciável apenas no ponto  $z = 1 + i0$ , e

$$f'(1 + 0i) = \frac{\partial u}{\partial x}(1, 0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(1, 0) = -i$$

(b) Sendo  $f(z) = z^2 - 3z = (x + iy)^2 - 3(x + iy) = x^2 - y^2 - 3x + i(2xy - 3y)$ , verifica-se que

$$\operatorname{Re} f \equiv u(x, y) = x^2 - y^2 - 3x \quad , \quad \operatorname{Im} f \equiv v(x, y) = 2xy - 3y$$

e como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x - 3$$

É óbvio que as condições de Cauchy-Riemann são verificadas para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , e atendendo a que todas as derivadas parciais são contínuas,  $f$  é diferenciável em  $\mathbb{C}$ , e

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2x - 3 + i2y = 2z - 3$$

para todo  $z \in \mathbb{C}$ .

(c) Sendo  $f(z) = z - \bar{z} = x + iy - (x - iy) = 2iy$ , verifica-se que

$$\operatorname{Re} f \equiv u(x, y) = 0 \quad , \quad \operatorname{Im} f \equiv v(x, y) = 2y$$

como tal, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2$$

Dado que, a condição  $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$  não se verifica para nenhum  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , o domínio de diferenciabilidade de  $f$  é o conjunto vazio.

(d) Sendo  $f(z) = \overline{e^z} = \overline{e^x \cos y + ie^x \sin y} = e^x \cos y - ie^x \sin y$ , verifica-se que

$$\operatorname{Re} f \equiv u(x, y) = e^x \cos y \quad , \quad \operatorname{Im} f \equiv v(x, y) = -e^x \sin y$$

como tal

$$\frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -e^x \cos y$$

Para que se verifiquem as condições de Cauchy- Riemann

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x \cos y = -e^x \cos y \\ -e^x \sin y = e^x \sin y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos y = 0 \\ \sin y = 0 \end{cases}$$

Atendendo a que as funções seno e cosseno nunca se anulam simultaneamente, tem-se que o domínio de diferenciabilidade é o conjunto vazio.

(e) Sendo  $f(z) = \operatorname{Im} z^2 = \operatorname{Im}(x^2 - y^2 + i2xy) = 2xy$ , verifica-se que

$$\operatorname{Re} f \equiv u(x, y) = 2xy \quad , \quad \operatorname{Im} f \equiv v(x, y) = 0$$

como tal, para todo  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2x \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

É imediato verificar que as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  são contínuas em  $\mathbb{R}^2$ , e que as equações de Cauchy Riemann se verificam apenas no ponto  $(0, 0)$ , pelo que a função admite derivada apenas em  $z = 0$ , e

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x}(0, 0) + i \frac{\partial v}{\partial x}(0, 0) = 0$$

5. Considere a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por  $f(z) = f(x + iy) = x^2 - y^2 + 2i|xy|$ .

(a) Estude a analiticidade de  $f(z)$ .

(b) Calcule  $f'(z)$  nos pontos onde  $f$  é analítica.

**Resolução:**

(a) Começemos por estudar o domínio de diferenciabilidade de  $f$ . Podemos escrever

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} x^2 - y^2 + 2xyi & \text{se } xy \geq 0 \\ x^2 - y^2 - 2xyi & \text{se } xy < 0 \end{cases}$$

pelo que, se  $xy \geq 0$

$$u(x, y) \equiv \operatorname{Re} f(x, y) = x^2 - y^2 \quad , \quad v(x, y) \equiv \operatorname{Im} f(x, y) = 2xy$$

e se  $xy < 0$

$$u(x, y) \equiv \operatorname{Re} f(x, y) = x^2 - y^2 \quad , \quad v(x, y) \equiv \operatorname{Im} f(x, y) = -2xy$$

Temos então que se  $xy \geq 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = 2x$$

e as condições de Cauchy-Riemann verificam-se para todo  $(x, y)$  tais que  $xy \geq 0$ . Dado que as derivadas parciais de  $u$  e  $v$  são contínuas na mesma região, conclui-se que  $f$  é diferenciável em  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z \geq 0\}$ . Para  $z$  nesta região

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(x, y) + i \frac{\partial v}{\partial x}(x, y) = 2x + i2y = 2z$$

No caso em que  $xy < 0$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -2y \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -2x$$

e as condições de Cauchy-Riemann não se verificam nesta região, pelo que  $f$  não admite derivada no conjunto  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z < 0\}$ .

(b) Para que  $f$  seja analítica num dado ponto de  $\mathbb{C}$  é necessário que: exista uma vizinhança de  $z$ ,  $U$ , onde  $f'(w)$  exista para todo  $w \in U$ . Tem-se então que o domínio de analiticidade de  $f$  é a região  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \cdot \operatorname{Im} z > 0\}$ .

6. Considere a função  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  definida por

$$f(z) = f(x + iy) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} + i \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Mostre que as equações de Cauchy-Riemann são verificadas em  $(x, y) = (0, 0)$ .

(b) Verifique, utilizando a definição, que  $f'(0)$  não existe.

(c) Porquê que isto não contradiz o Teorema de Cauchy-Riemann?

**Resolução:**

(a) Atendendo à definição de  $f$ , podemos escrever

$$u(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 - y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases} \quad , \quad v(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Tem-se então

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(h,0) - u(0,0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(0,h) - u(0,0)}{h} = -1$$

e

$$\frac{\partial v}{\partial x}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(h,0) - v(0,0)}{h} = 1 \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial y}(0,0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(0,h) - v(0,0)}{h} = 1,$$

É então óbvio que as condições de Cauchy-Riemann se verificam em  $(x, y) = (0, 0)$ .

(b) Por definição

$$f'(0) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{f(z) - f(0)}{z} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\frac{x^3-y^3}{x^2+y^2} + i \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}}{x+iy}$$

Fazendo  $z$  convergir para 0 no eixo real (o que significa  $x \rightarrow 0$  e  $y = 0$ ), obtem-se

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x + ix}{x} = 1 + i$$

enquanto que, fazendo  $z$  convergir para 0 na recta  $\{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z = \operatorname{Im} z\}$  (o que significa  $x \rightarrow 0$  e  $y = x$ ), obtem-se

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{ix}{x + ix} = \frac{i}{1 + i} = \frac{1 + i}{2}$$

Como  $1 + i \neq \frac{1+i}{2}$  conclui-se que o limite não existe e consequentemente  $f$  não admite derivada em  $z = 0$ .

(c) As funções  $u(x, y)$  e  $v(x, y)$  embora tenham as derivadas parciais em  $(0, 0)$  não são diferenciáveis em  $(0, 0)$ . Assim, a função  $f$ , vista como uma função de  $\mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , não é diferenciável em  $(0, 0)$ .

7. Mostre que se  $f$  e  $\bar{f}$  são ambas inteiras, então  $f$  é constante.

**Resolução:**

Recordemos que se  $f$  é analítica num conjunto aberto e conexo  $A \subset \mathbb{C}$  e  $f'(z) = 0$ , então  $f$  é constante. No nosso caso  $A = \mathbb{C}$ , logo basta verificar que  $f'(z) = 0$ .

Escrevendo  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ , como  $f$  é analítica em  $\mathbb{C}$ , concluímos que as funções  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Por outro lado, escrevendo  $\bar{f}(x, y) = u(x, y) - iv(x, y)$ , como  $\bar{f}$  é analítica em  $\mathbb{C}$ , concluímos que as funções  $u$  e  $-v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x}.$$

Deste conjunto de equações concluímos que:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Mas então:

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0,$$

como pretendíamos.

8. Seja  $A \subset \mathbb{C}$  um aberto e defina  $A^* = \{z \in \mathbb{C} : \bar{z} \in A\}$ . Se  $f$  é uma função analítica em  $A$  mostre que  $F(z) = \overline{f(\bar{z})}$  é uma função analítica em  $A^*$ .

**Resolução:**

Se escrevermos  $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$  e  $F(z) = U(x, y) + iV(x, y)$ , obtemos:

$$F(z) = \overline{f(\bar{z})} = u(x, -y) - iv(x, -y) = U(x, y) + iV(x, y).$$

Ou seja,  $U(x, y) = u(x, -y)$  e  $V(x, y) = -v(x, -y)$ . Como  $u$  e  $v$  são funções diferenciáveis em  $A$ , segue-se que  $U$  e  $V$  são funções diferenciáveis em  $A^*$ . Por outro lado, verificamos que  $U$  e  $V$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann em  $A^*$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} u(x, -y) \\ &= \left. \frac{\partial u}{\partial x} \right|_{(x, -y)} = \left. \frac{\partial v}{\partial y} \right|_{(x, -y)} \\ &= \frac{\partial}{\partial y} (-v(x, -y)) = \frac{\partial V}{\partial y}, \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} u(x, -y) \\ &= - \left. \frac{\partial u}{\partial y} \right|_{(x, -y)} = - \left. \frac{\partial v}{\partial x} \right|_{(x, -y)} \\ &= - \frac{\partial}{\partial x} (-v(x, -y)) = - \frac{\partial V}{\partial x}, \end{aligned}$$

onde utilizámos que  $u$  e  $v$  satisfazem as equações de Cauchy-Riemann. Assim, podemos concluir que  $F$  é analítica em  $A^*$ .